Pentatic Mathematics Competition IV
Simulasi KSK SMP/MTs Se-Derajat

Wildabandon

23 – 26 Juni 2020

I

Soal

PETUNJUK

1. Kerjakan soal-soal berikut dengan jujur agar mendapatkan manfaat yang maksimal.
2. Lama pengerjaan soal adalah 123 menit termasuk mengisi identitas siswa.
3. Dilarang menggunakan alat bantu hitung seperti, kalkulator, busur, maupun alat bantu hitung lainnya.
4. Terdiri dari 25 soal dengan setiap soal terdiri dari empat pilihan: A, B, C, atau D.
5. Untuk perolehan poin:
   (a). Untuk soal yang dijawab **benar**, mendapat 5 (lima) poin,
   (b). Untuk soal yang dijawab **salah**, mendapat -1 (minus satu) poin,
   (c). Untuk soal yang **tidak dijawab** atau **kosong**, mendapat 0 (nol) poin.
6. Selamat mengerjakan!

1. Diberikan fungsi f dan g sehingga $f(x) = 3x - 1$ dan $g(f(x)) = x + 2$. Nilai dari $g(5)$ adalah . . . .

   A. -2 B. 4 C. 7 D. 14

2. Jika $a \triangle b = a^2 + ab + b^2$, maka nilai dari $2 \triangle (3 \triangle (-1))$ adalah . . . .

   A. 57 B. 343 C. 67 D. 37

3. Grafik $y = ax + 6$ menyinggung grafik $y = x^2 + 5x + 7$ di titik $P(m, n)$. Nilai dari $a + m + n$ yang mungkin adalah . . . .

   A. -1 atau 5 B. -1 atau 7 C. 5 atau 21 D. 5 atau 11

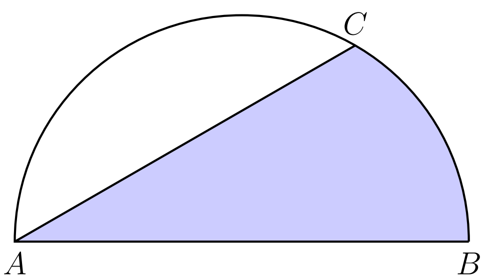
4. Diberikan sebuah kubus besar berukuran $10 \times 10 \times 10$ dibentuk dari kubus-kubus kecil yang berukuran $1 \times 1 \times 1$. Penta mengecat kubus besar tersebut dengan cat warna merah. Banyak kubus-kubus kecil dimana tepat dua sisi kubus tersebut berwarna merah adalah . . . .

   A. 109 B. 96 C. 89 D. 91

5. Di sebuah cafe, terdapat m meja yang akan ditempati n anak. Jika setiap meja diduduki 2 anak, maka tersisa 2 anak yang tidak mendapatkan meja. Jika setiap meja diduduki 3 anak, maka tersisa 3 meja yang tidak terpakai. Nilai dari $m + n$ adalah . . . .

   A. 17 B. 21 C. 29 D. 35

6. Diberikan setengah lingkaran berdiameter AB. Titik C terletak pada busur AB sehingga luas daerah yang berwarna biru berikut adalah $\left(12\sqrt{3} + 8\pi\right)$ satuan luas. Jika besar $\angle BAC = 30°$, maka luas dari setengah lingkaran tersebut adalah . . . satuan luas.



   A. 24π B. 6π C. 48π D. 36π

7. Diberikan sebuah balok dengan panjang 8 cm, lebar 6 cm, dan tinggi 5 cm yang berisi air air hingga setengahnya. Sebuah kubus besi dimasukkan ke dalam balok tersebut sehingga air naik sebesar $\frac{4}{3}$ cm. Luas permukaan dari kubus besi tersebut adalah . . . .

   A. 6 cm^2 B. 24 cm^2 C. 54 cm^2 D. 96 cm^2

8. Misalkan

$$P = 8 + 98 + 998 + 9998 + \cdots + \underbrace{999\cdots998}_{\text{2020 angka}}$$

   Jumlah angka-angka dari P adalah . . . .

   Catatan : Sebagai contoh, jumlah angka-angka dari 2020 adalah $2 + 0 + 2 + 0 = 4$.

   A. 2029 B. 2030 C. 2031 D. 2032

9. Suatu hari, Wildan, Bagus, dan Penta sedang membicarakan uang mereka.

   Wildan : Jumlah uangku dan uang Bagus sama dengan $\frac{5}{6}$ jumlah uang Penta.

   Bagus : Selisih jumlah uang kalian adalah Rp120.000,00.

   Penta : Sedangkan, selisih jumlah uang kalian adalah Rp110.000,00.

   Jumlah uang dari Wildan, Bagus, dan Penta adalah . . . .

A. Rp550.000,00 B. Rp490.000,00 C. Rp610.000,00 D. Rp600.000,00

10. Diberikan a dan b bilangan real yang memenuhi

$$5a^2 + b^2 + 1 = 2b(1 + 2a)$$

Nilai dari $a + b$ adalah . . . .

A. 3 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

11. Suatu bilangan asli disebut *palindrom* jika bilangan tersebut dapat dibaca dari kanan maupun dari kiri. Sebagai contoh, 121; 9; dan 4567654 merupakan bilangan palindrom, sedangkan 341 dan 12322 bukan bilangan palindrom. Banyak bilangan palindrom 4 angka yang habis dibagi 8 adalah . . . .

A. 10 B. 8 C. 13 D. 12

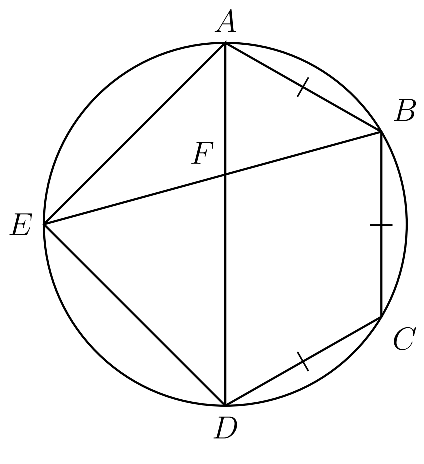
12. Penta sedang mengikuti sebuah ujian yang terdiri dari 4 soal pilihan ganda dan 2 pilihan benar salah. Pada masing-masing soal pilihan ganda terdiri dari pilihan jawaban (a), (b), (c), dan (d). Sedangkan, pada masing-masing soal pilihan benar salah terdiri dari pilihan jawaban benar dan salah. Hanya ada satu jawaban yang tepat untuk masing-masing soal. Jika Penta menjawab ujian tersebut dengan asal-asalan, peluang Penta menjawab benar tepat sebanyak 5 soal adalah . . . .

A. $\frac{7}{512}$ B. $\frac{1}{512}$ C. $\frac{9}{1024}$ D. $\frac{11}{1024}$

13. Sebuah kubus $ABCD.EFGH$ memiliki panjang rusuk 7 satuan. Dibentuk sebuah bola yang melalui semua titik sudut dari kubus $ABCD.EFGH$. Luas permukaan dari bola tersebut adalah . . . satuan luas. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

A. 1249 B. 103 C. 1848 D. 462

14. Diberikan titik A, B, C, D, E terletak pada lingkaran seperti gambar dibawah ini sehingga panjang $AB = BC = CD$ dan E titik tengah busur AD. Jika BE memotong AD di titik F dan AD diameter lingkaran, maka besar $\angle AFE$ adalah . . . .



A. 95° B. 80° C. 105° D. 120°

15. Banyak bilangan real x yang memenuhi persamaan

$$\left(x^2 - 6x + 9\right)^{x^2-1} = 1$$

adalah . . . .

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

16. Banyak pasangan bilangan prima (p, q) dimana $p > q$ yang memenuhi

$$(q + 1) + (q + 2) + \cdots + p = 2020$$

adalah . . . .

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

17. Sebanyak 8 kursi identik yang mengelilingi sebuah meja bundar. Sebanyak 4 laki-laki dan 3 perempuan akan duduk di kursi tersebut. Banyak cara mereka duduk sehingga tidak ada dua perempuan yang duduk bersebelahan adalah . . . .

    A. 2160 B. 720 C. 1440 D. 4320

18. Diberikan p dan q bilangan prima sehingga akar-akar dari $x^2 - px + q = 0$ merupakan bilangan bulat. Misalkan x_1 dan x_2 merupakan akar-akar dari $x^2 - px + q = 0$. Nilai dari $x_1^2 + x_2^2 + p^2 + q^2$ adalah . . . .

    A. 15 B. 18 C. 34 D. 25

19. Suatu pasangan bilangan asli (a, b) disebut *puyuh* jika terdapat bilangan prima p yang memenuhi
$$ab - p = b(b - 1)$$
Banyak pasangan bilangan asli (a, b) yang puyuh dengan $p < 100$ adalah . . . .

    A. 25 B. 31 C. 42 D. 50

20. Suatu fungsi f memenuhi properti berikut.
    (a). Memiliki domain semua bilangan real,
    (b). Berlaku $f(-x) = -f(x)$,
    (c). Memenuhi
$$f(2x - 3) + f(x - 3) - 2f(3x - 10) = 28 - 6x$$
Nilai dari $f(4)$ adalah . . . .

    A. -2 B. 4 C. 8 D. 11

21. Diberikan $\triangle ABC$ dengan panjang sisi $AB = BC = AC = 6$ satuan. Titik P terletak di dalam $\triangle ABC$. Misalkan titik X, Y, Z berturut-turut pada sisi AB, BC, dan AC sehingga besar $\angle AXP = \angle BYP = \angle CZP = 90°$. Nilai dari
$$\sqrt{AZ^2 + PZ^2 - AX^2} + \sqrt{PX^2 + BX^2 - BY^2} + \sqrt{PY^2 + CY^2 - CZ^2}$$
adalah . . . .

    A. $6\sqrt{3}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

22. Sebuah setengah lingkaran berpusat di titik O dan AB sebagai diameternya. Titik C terletak pada busur AB sehingga besar $\angle BOC = 120°$. Titik D terletak pada AO dan titik E terletak pada OC sehingga $ADEF$ merupakan persegi. Jika panjang jari-jari setengah lingkaran adalah 6 cm, maka panjang CE adalah . . . . cm.

    A. $6 + 6\sqrt{3}$ B. $6\sqrt{3} - 6$ C. $9 - 3\sqrt{3}$ D. $12 - 6\sqrt{3}$

23. Diberikan bilangan a, b, c tak nol sehingga
$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$$
Nilai dari
$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right)\left(1 + \frac{a}{c}\right)$$
yang mungkin adalah . . . .

    A. 15 B. -4 C. 8 D. 2

24. Untuk setiap bilangan asli n, didefinisikan
$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \cdots \times 1$$
Sebagai contoh, $1! = 1$ dan $5! = 120$. Banyak bilangan kuadrat sempurna dari barisan bilangan-bilangan
$$1!; \quad 1! + 2!; \quad 1! + 2! + 3!; \quad 1! + 2! + 3! + 4!; \quad \cdots; \quad 1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + 2020!$$
adalah . . . .
Catatan : Bilangan asli m disebut *kuadrat sempurna* jika $\sqrt{m}$ bilangan bulat.

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

25. Untuk setiap bilangan real x, didefinisikan:
    - $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 5 \rfloor = 5$; $\lfloor 10,4 \rfloor = 10$; dan $\lfloor -6,5 \rfloor = -7$.
    - $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 5 \rceil = 5$; $\lceil 10,4 \rceil = 11$; dan $\lceil -6,5 \rceil = -6$.

    Misalkan semua bilangan real x yang memenuhi persamaan

    $$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{x+1}{2} \right\rceil = 2020$$

    dapat dinyatakan dengan $a < x < b$. Jika nilai maksimum a adalah M_a dan nilai minimum b adalah m_b, nilai dari $M_a + m_b$ adalah . . . .

    A. 2020 B. 4039 C. 3055 D. 4046

II

Soal dan Solusi

1. Diberikan fungsi f dan g sehingga $f(x) = 3x - 1$ dan $g(f(x)) = x + 2$. Nilai dari $g(5)$ adalah . . . .

A. -2 B. 4 C. 7 D. 14

Solusi. Karena $f(x) = 3x - 1$ dan $g(f(x)) = x + 2$, maka $g(3x - 1) = x + 2$. Agar mendapatkan $g(5)$, maka $3x - 1 = 5$ sehingga $3x = 6 \iff x = 2$. Demikian $g(5) = 2 + 2 = \boxed{4}$.

> **Komentar.** Sebanyak 78.12% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini tergolong **mudah**. Selain solusi diatas, Anda dapat menyelesaikan terlebih dahulu bentuk $g(x)$, yaitu $g(x) = \dfrac{x+7}{3}$. Demikian diperoleh $g(x) = \dfrac{5+7}{3} = \dfrac{12}{3} = 4$.

2. Jika $a \bigtriangleup b = a^2 + ab + b^2$, maka nilai dari $2 \bigtriangleup (3 \bigtriangleup (-1))$ adalah . . . .

A. 57 B. 343 C. 67 D. 37

Solusi. Operasi yang diutamakan terlebih dahulu adalah $3 \bigtriangleup (-1)$. Maka

$$3 \bigtriangleup (-1) = 3^2 + 3(-1) + (-1)^2 = 9 - 3 + 1 = 7$$

Maka $2 \bigtriangleup (3 \bigtriangleup (-1)) = 2 \bigtriangleup 7$. Maka

$$2 \bigtriangleup 7 = 2^2 + 2 \cdot 7 + 7^2 = 4 + 14 + 49 = 67$$

Jadi, $2 \bigtriangleup (3 \bigtriangleup (-1)) = \boxed{67}$.

> **Komentar.** Sebanyak 95% peserta berhasil menjawab soal ini dengan mudah. Soal ini merupakan soal **termudah** pada PMC IV.

3. Grafik $y = ax + 6$ menyinggung grafik $y = x^2 + 5x + 7$ di titik $P(m, n)$. Nilai dari $a + m + n$ yang mungkin adalah . . . .

A. -1 atau 5 B. -1 atau 7 C. 5 atau 21 D. 5 atau 11

Solusi. Karena $y = ax + 6$ menyinggung $y = x^2 + 5x + 7$, demikian kedua grafik tersebut berpotongan di satu titik. Maka

$$ax + 6 = x^2 + 5x + 7 \iff 0 = x^2 + (5 - a)x + 1 \tag{1}$$

Karena berpotongan di satu titik, maka diskriminan dari persamaan kuadrat (1) adalah $\Delta = 0$. Maka

$$\begin{aligned}(5-a)^2 - 4(1)(1) &= 0\\ (5-a)^2 &= 4\\ 5 - a &= \pm 2\end{aligned}$$

- Jika $5 - a = 2$, maka $a = 3$. Subtitusikan ke (1), diperoleh $0 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ yang menyimpulkan $x = -1$. Subtitusikan ke $y = ax + 6 = 3x + 6$, maka $y = 3(-1) + 6 = -3 + 6 = 3$. Demikian kita peroleh $P(-1, 3)$. Sehingga $a + m + n = 3 + (-1) + 3 = 5$.
- Jika $5 - a = -2$, maka $a = 7$. Subtitusikan ke (1), diperoleh $0 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ yang menyimpulkan $x = 1$. Subtitusikan ke $y = ax + 6 = 7x + 6$, maka $y = 7(1) + 6 = 13$. Demikian kita peroleh $P(1, 13)$. Sehingga $a + m + n = 7 + 1 + 13 = 21$.

Jadi, nilai dari $a + m + n$ yang mungkin adalah $\boxed{5 \text{ atau } 21}$.

> **Komentar.** Sebanyak 46.87% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang**. Kata kunci penyelesaian soal ini adalah kedua grafik tersebut saling bersinggungan yang artinya hanya memiliki satu titik persekutuan (atau satu titik potong). Kemudian dapat meninjau bahwa sifat persamaan kuadrat yang memiliki tepat satu solusi yaitu diskriminannya bernilai 0.

4. Diberikan sebuah kubus besar berukuran $10 \times 10 \times 10$ dibentuk dari kubus-kubus kecil yang berukuran $1 \times 1 \times 1$. Penta mengecat kubus besar tersebut dengan cat warna merah. Banyak kubus-kubus kecil dimana tepat dua sisi kubus tersebut berwarna merah adalah . . . .

A. 109 B. 96 C. 89 D. 91

Solusi. Untuk kubus besar $3 \times 3 \times 3$ terdapat 12 kubus kecil $1 \times 1 \times 1$ yang tepat dua sisinya berwarna merah. Maka untuk kubus besar berukuran $n \times n \times n$, ada sebanyak $12(n-2)$ kubus kecil $1 \times 1 \times 1$ yang tepat dua sisinya berwarna merah. Sehingga untuk kubus besar berukuran $10 \times 10 \times 10$, banyak kubus-kubus kecil $1 \times 1 \times 1$ yang tepat dua sisi kubusnya berwarna merah adalah $12(10-2) = 12 \cdot 8 = \boxed{96}$.

> **Komentar.** Sebanyak 85.93% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sangat mudah**. Dalam menyelesaikan soal ini, dapat menggunakan perhitungan dengan kasus yang sederhana, misalnya dimulai dari $n = 3$, lalu $n = 4$, dan $n = 5$ hingga dapat menemukan pola yang sesuai diminta soal. Dengan menuliskan formula umum akan sangat bermanfaat untuk nilai n yang semakin besar (misalnya untuk kubus besar berukuran $1000 \times 1000 \times 1000$).

5. Di sebuah cafe, terdapat m meja yang akan ditempati n anak. Jika setiap meja diduduki 2 anak, maka tersisa 2 anak yang tidak mendapatkan meja. Jika setiap meja diduduki 3 anak, maka tersisa 3 meja yang tidak terpakai. Nilai dari $m + n$ adalah . . . .

A. 17 B. 21 C. 29 D. 35

Solusi. Jika setiap meja diduduki 2 anak, maka tersisa 2 anak yang tidak mendapatkan meja. Maka $n = 2m + 2$. Jika setiap meja diduduki 3 anak, maak tersisa 3 meja yang tidak terpakai. Maka $n = 3(m-3) = 3m - 9$. Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} n = 2m + 2 &= 3m - 9 \\ 2 + 9 &= 3m - 2m \\ m &= 11 \end{aligned}$$

Subtitusikan, $n = 3(m-3) = 3(11-3) = 3 \cdot 8 = 24$. Demikian $m + n = 11 + 24 = \boxed{35}$.

> **Komentar.** Sebanyak 68.75% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **mudah**. Soal ini merupakan pemecahan masalah yang berkaitan dengan sistem persamaan linier dua variabel (SPLDV). Anda harus benar-benar paham dalam memaknai soal sehingga tidak salah menuliskan persamaan sesuai yang diminta pada soal.

6. Diberikan sebuah balok dengan panjang 8 cm, lebar 6 cm, dan tinggi 5 cm yang berisi air air hingga setengahnya. Sebuah kubus besi dimasukkan ke dalam balok tersebut sehingga air naik sebesar $\frac{4}{3}$ cm. Luas permukaan dari kubus besi tersebut adalah . . . .

A. 6 cm^2 B. 24 cm^2 C. 54 cm^2 D. 96 cm^2

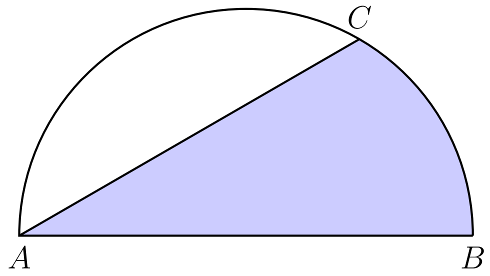
Solusi. Misalkan panjang sisi kubus besi adalah s cm. Karena ketika kubus tersebut dimasukkan air naik sebesar $\frac{4}{3}$ cm, maka

$$V_{\text{kubus}} = \frac{4}{3} L_{\text{alas balok}} = \frac{4}{3} pl = \frac{4}{3} \cdot 8 \cdot 6 = 64$$

Karena $V_{\text{kubus}} = s^3$, maka $s^3 = 64$ cm^3 yang menyimpulkan $s = 4$ cm. Demikian luas permukaan kubus besi tersebut adalah $6s^2 = 6 \cdot 4^2 = 6 \cdot 16 = \boxed{96 \text{ cm}^2}$.

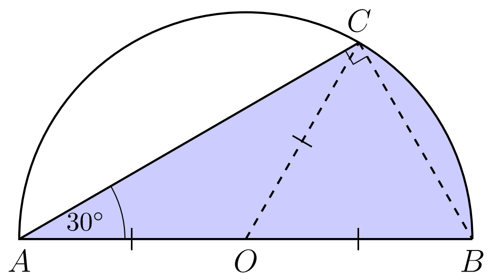
> **Komentar.** Sebanyak 75% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **mudah**. Dapat diperhatikan bahwa volume kubus sama besarnya dengan volume air yang naik sebesar $\frac{4}{3}$ cm ($t = 4/3$).

7. Diberikan setengah lingkaran berdiameter AB. Titik C terletak pada busur AB sehingga luas daerah yang berwarna biru berikut adalah $\left(12\sqrt{3} + 8\pi\right)$ satuan luas. Jika besar $\angle BAC = 30°$, maka luas dari setengah lingkaran tersebut adalah . . . satuan luas.



A. 24π B. 6π C. 48π D. 36π

Solusi. Misalkan pusat setengah lingkaran adalah O.



Perhatikan bahwa $\angle BAC$ dan $\angle BOC$ berturut-turut merupakan sudut keliling yang menghadap busur yang sama, yaitu busur BC. Akibatnya,

$$\angle BOC = 2\angle BAC = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

Demikian pula dengan alasan yang sama berakibat

$$\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

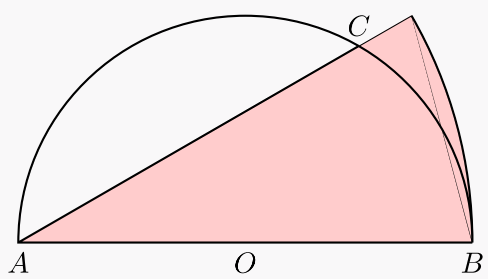
Demikian $\angle ABC = 60^\circ$.

Perhatikan bahwa AO, OB, dan OC masing-masing merupakan jari-jari setengah lingkaran. Misalkan jari-jari setengah lingkaran adalah r. Maka panjang $AO = OB = OC = r$. Demikian panjang $AB = 2r$. Perhatikan bahwa suatu segitiga yang memiliki sudut $30^\circ, , 60^\circ, 90^\circ$ memiliki perbandingan sisi $1 : \sqrt{3} : 2$. Karena panjang $AB = 2r$, maka panjang $AC = r\sqrt{3}$ dan $BC = r$. Perhatikan bahwa panjang $OB = OC = BC = r$ yang berarti $\triangle OBC$ sama sisi. Demikian luas daerah berwarna biru adalah

$$\begin{aligned}
L_{\text{biru}} &= L_{\triangle ABC} - L_{\triangle OBC} + L_{\text{juring } OBC} \\
12\sqrt{3} + 8\pi &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC - \left(\frac{r}{2}\right)^2 \sqrt{3} + \frac{\angle OBC}{360^\circ}\pi r^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot r\sqrt{3} \cdot r\sqrt{3} - \frac{r^2}{4}\sqrt{3} + \frac{60^\circ}{360^\circ}\pi r^2 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2 + \frac{1}{6}\pi r^2 && \text{(Kalikan kedua ruas dengan 12)} \\
144\sqrt{3} + 96\pi &= 6r^2\sqrt{3} - 3r^2\sqrt{3} + 2\pi r^2 \\
48\left(3\sqrt{3} + 2\right) &= \left(3\sqrt{3} + 2\pi\right) r^2
\end{aligned}$$

yang menyimpulkan $r^2 = 48$. Demikian luas setengah lingkaran tersebut adalah $L_{1/2 \text{ lingkaran}} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 48 = \boxed{24\pi}$ satuan luas.

Komentar. Sebanyak 42.18% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang**. Kesalahan umum yang dilakukan peserta, yang pertama yaitu ketika telah menemukan $r^2 = 48$, kemudian menyatakan luas lingkaran tersebut dengan $\pi r^2 = 48\pi$. Kesalahan kedua, yaitu dengan menganggap bahwa luas daerah berwarna biru sebagai $\frac{30^\circ}{360^\circ}\pi AB^2$. Padahal, jika kita gambarkan, $\frac{30^\circ}{360^\circ}\pi AB^2$ menyatakan luas daerah berwarna merah berikut.



8. Misalkan

$$P = 8 + 98 + 998 + 9998 + \cdots + \underbrace{999\cdots998}_{\text{2020 angka}}$$

Jumlah angka-angka dari P adalah . . . .

Catatan : Sebagai contoh, jumlah angka-angka dari 2020 adalah $2 + 0 + 2 + 0 = 4$.

A. 2029 B. 2030 C. 2031 D. 2032

Solusi. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
P &= 8 + 98 + 998 + 9998 + \cdots + \underbrace{999\cdots998}_{2020 \text{ angka}} \\
&= 10 - 2 + 100 - 2 + 1000 - 2 + 10000 - 2 + \cdots + \underbrace{1000\cdots000}_{2020 \text{ angka } 0} - 2 \\
&= \underbrace{111\cdots111}_{2020 \text{ angka } 1} - 2 \cdot 2020 \\
&= \underbrace{111\cdots111111}_{2020 \text{ angka } 1} - 4040 \\
P &= \underbrace{111\cdots111}_{2015 \text{ angka } 1}07071
\end{aligned}$$

Demikian jumlah semua angka-angka dari P adalah

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{2015 \text{ angka } 1} + 0 + 7 + 0 + 7 + 1 = 2015 + 15 = \boxed{2030}$$

> **Komentar.** Sebanyak 56.25% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang-mudah**. Ide penyelesaian dari soal ini adalah
>
> $$\underbrace{999\cdots998}_{n \text{ angka}} = \underbrace{100\cdots000}_{n+1 \text{ angka}} - 2$$
>
> sehingga dapat melakukan perhitungan yang lebih sederhana.

9. Suatu hari, Wildan, Bagus, dan Penta sedang membicarakan uang mereka.

Wildan : Jumlah uangku dan uang Bagus sama dengan $\frac{5}{6}$ jumlah uang Penta.

Bagus : Selisih jumlah uang kalian adalah Rp120.000,00.

Penta : Sedangkan, selisih jumlah uang kalian adalah Rp110.000,00.

Jumlah uang dari Wildan, Bagus, dan Penta adalah . . . .

A. Rp550.000,00 B. Rp490.000,00 C. Rp610.000,00 D. Rp600.000,00

Solusi. Misalkan w, b, p berturut-turut menyatakan jumlah uang Wildan, Bagus, dan Penta. Dari pernyataan Wildan, maka

$$w + b = \frac{5}{6}p \qquad (1)$$

Definisikan juga

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jika} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{jika} \quad x < 0 \end{cases}$$

Dari pernyataan Bagus, maka

$$|w - p| = 120.000$$

Perhatikan bahwa

$$w + b = \frac{5}{6}p < p \iff w < p - b < p$$

yang berarti $w < p$. Demikian haruslah

$$120.000 = |w - p| = -(w - p) = p - w \iff p = 120.000 + w \qquad (2)$$

Jika kita subtitusikan ke (1), maka

$$\begin{aligned}
w + b &= \frac{5}{6}p && \text{(Kalikan kedua ruas dengan 6)} \\
6w + 6b &= 5p \\
6w + 6b &= 5(120.000 + w) \\
6w + 6b &= 600.000 + 5w \\
w + 6b &= 600.000 && (3)
\end{aligned}$$

Dari pernyataan Penta, maka

$$|w - b| = 110.000$$

Andaikan $w < b$. Maka $110.000 = |w - b| = -(w - b) = b - w$ sehingga $b = 110.000 + w$. Subtitusikan ke persamaan (3), maka

$$\begin{aligned}
w + 6b &= 600.000\\
w + 6(110.000 + w) &= 600.000\\
w + 660.000 + 6w &= 600.000\\
7w &= -60.000\\
w &= \frac{-60.000}{7}
\end{aligned}$$

yang jelas tidak mungkin karena $w \geq 0$. Sehingga haruslah $w \geq b$, maka $110.000 = |w - b| = w - b$ sehingga $w = 110.000 + b$. Subtitusikan ke persamaan (3), maka

$$\begin{aligned}
w + 6b &= 600.000\\
110.000 + b + 6b &= 600.000\\
7b &= 490.000\\
b &= 70.000
\end{aligned}$$

Subtitusikan $w = 110.000 + b = 110.000 + 70.000 = 180.000$. Subtitusikan ke persamaan (2), maka $p = 120.000 + w = 120.000 + 180.000 = 300.000$. Demikian jumlah uang Wildan, Bagus, dan Penta adalah

$$w + b + p = 180.000 + 70.000 + 300.000 = 550.000$$

Jadi, jumlah uang mereka bertiga adalah $\boxed{\text{Rp}550.000,00}$.

> **Komentar.** Sebanyak 67.18% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini tergolong **mudah**. Kesalahan umum yang dilakukan, selisih dari dua bilangan dianggap hasil pengurangan dari dua bilangan. Sebagai contoh, selisih uang Wildan dan Bagus dituliskan dengan $w - b$. Padahal, selisih dari dua bilangan diperoleh nilai mutlak dari pengurangan dua bilangan tersebut. Sebagai contoh, selisih 3 dan 20 adalah $|3 - 20| = |-17| = 17$.

10. Sebuah kubus $ABCD.EFGH$ memiliki panjang rusuk 7 satuan. Dibentuk sebuah bola yang melalui semua titik sudut dari kubus $ABCD.EFGH$. Luas permukaan dari bola tersebut adalah . . . satuan luas. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

A. 1249 B. 103 C. 1848 D. 462

Solusi. Perhatikan bahwa AG merupakan diameter lingkaran. Misalkan R adalah jari-jari lingkaran. Maka

$$\begin{aligned}
2R &= \sqrt{AB^2 + BG^2}\\
&= \sqrt{AB^2 + BC^2 + CG^2}\\
&= \sqrt{7^2 + 7^2 + 7^2}\\
&= \sqrt{7^2 \cdot 3}\\
2R &= 7\sqrt{3}\\
R &= \frac{7}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Maka luas permukaan bola tersebut adalah

$$L = 4\pi R^2 = 4 \cdot \frac{22}{7} \cdot \left(\frac{7}{2}\sqrt{3}\right)^2 = 4 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{49}{4} \cdot 3 = \boxed{462}$$

> **Komentar.** Sebanyak 56.25% peserta berhasil menjawa soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang-mudah**.

11. Suatu bilangan asli disebut *palindrom* jika bilangan tersebut dapat dibaca dari kanan maupun dari kiri. Sebagai contoh, 121; 9; dan 4567654 merupakan bilangan palindrom, sedangkan 341 dan 12322 bukan bilangan palindrom. Banyak bilangan palindrom 4 angka yang habis dibagi 8 adalah . . . .

A. 10 B. 8 C. 13 D. 12

Solusi. Misalkan bilangan tersebut adalah $abba$ dengan a, b suatu digit dan $a \neq 0$. Agar $abba$ habis dibagi 8, maka bba harus habis dibagi 8. Demikian haruslah

$$100b + 10b + a = 110b + a \equiv 0 \pmod 8 \Longrightarrow 6b + a \equiv 0 \pmod 8$$

- Jika $b = 0$, maka $a \equiv 0 \pmod 8$. Maka $a = 8$.
- Jika $b = 1$, maka $a \equiv 2 \pmod 8$. Maka $a = 2$.
- Jika $b = 2$, maka $a \equiv 4 \pmod 8$. Maka $a = 4$.
- Jika $b = 3$, maka $a \equiv 6 \pmod 8$. Maka $a = 6$.
- Jika $b = 4$, maka $a \equiv 0 \pmod 8$. Maka $a = 8$.
- Jika $b = 5$, maka $a \equiv 2 \pmod 8$. Maka $a = 2$.
- Jika $b = 6$, maka $a \equiv 4 \pmod 8$. Maka $a = 4$.
- Jika $b = 7$, maka $a \equiv 6 \pmod 8$. Maka $a = 6$.
- Jika $b = 8$, maka $a \equiv 0 \pmod 8$. Maka $a = 8$.
- Jika $b = 9$, maka $a \equiv 2 \pmod 8$. Maka $a = 2$.

Kita peroleh bilangan palindrom tersebut adalah $8008, 2112, 4224, 6336, 8448, 2552, 4664, 6776, 8888$, dan 2992 yang berarti ada $\boxed{10}$.

> **Komentar.** Soal ini merupakan **SOAL BONUS** yeay :(Karena pada soal sebelumnnya adalah "banyak bilangan palindrom 6 angka yang habis dibagi 8 adalah . . . .".

12. Penta sedang mengikuti sebuah ujian yang terdiri dari 4 soal pilihan ganda dan 2 pilihan benar salah. Pada masing-masing soal pilihan ganda terdiri dari pilihan jawaban (a), (b), (c), dan (d). Sedangkan, pada masing-masing soal pilihan benar salah terdiri dari pilihan jawaban benar dan salah. Hanya ada satu jawaban yang tepat untuk masing-masing soal. Jika Penta menjawab ujian tersebut dengan asal-asalan, peluang Penta menjawab benar tepat sebanyak 5 soal adalah . . . .

A. $\frac{7}{512}$ B. $\frac{1}{512}$ C. $\frac{9}{1024}$ D. $\frac{11}{1024}$

Solusi. Pada soal pilihan ganda, masing-masing soal memiliki peluang $\frac{1}{4}$ untuk menjawab benar dan peluang $\frac{3}{4}$ untuk menjawab salah. Pada soal pilihan benar salah, maka masing-masing soal memiliki peluang $\frac{1}{2}$ untuk menjawab benar dan peluang $\frac{1}{2}$ untuk menjawab salah.

a) Jika sebanyak 4 soal pilihan ganda dan 1 soal pilihan benar salah yang dijawab benar, maka peluangnya adalah

$$\begin{aligned} C_4^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot C_1^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 &= \frac{4!}{4!0!} \cdot \frac{1}{256} \cdot 1 \cdot \frac{2!}{1!1!} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{256} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{1024} \end{aligned}$$

b) Jika sebanyak 3 soal pilihan ganda dan 2 soal pilihan benar salah yang dijawab benar, maka peluangnya adalah

$$\begin{aligned} C_3^4 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^1 \cdot C_2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 &= \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2!}{2!0!} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{64} \cdot \frac{3}{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{12}{1024} \end{aligned}$$

Maka total peluangnya adalah $\frac{2}{1024} + \frac{12}{1024} = \frac{14}{1024} = \boxed{\frac{7}{512}}$.

> **Komentar.** Sebanyak 39.06% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang-sulit**. Soal dengan tipe seperti ini dapat memanfaatkan *Distribusi Binomial*.

13. Diberikan a dan b bilangan real yang memenuhi

$$5a^2 + b^2 + 1 = 2b(1 + 2a)$$

Nilai dari $a + b$ adalah . . . .

A. 3 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

Solusi. Perhatikan bahwa persamaan ekuivalen dengan

$$b^2 + 4a^2 + 1 - 4qb + 2a - 2b = 4a - a^2 \iff (b - 2a - 1)^2 = a(4 - a)$$

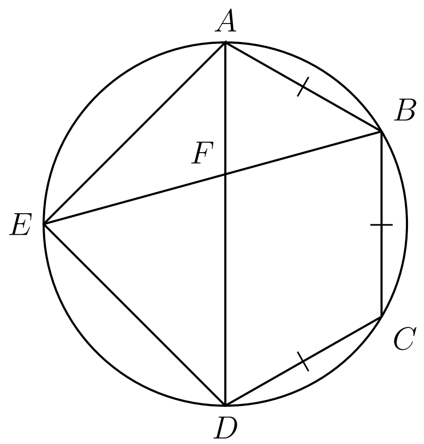
sehingga $b - 2a - 1 = \pm\sqrt{a(4 - a)}$. Demikian

$$b = 2a + 1 \pm \sqrt{a(4 - a)}$$

yang berarti $a + b = 3a + 1 \pm \sqrt{a(4 - a)}$ yang berarti ada tak hingga nilai untuk $a + b$ dengan $0 \leq a \leq 4$.

> **Komentar.** Soal ini merupakan **SOAL BONUS** kedua :(Seharusnya bentuk persamaan soal yang mungkin adalah
>
> $$4a^2 + 2b^2 + 1 = 2b(1 + 2a)$$
>
> Jika tetap dengan soal tersebut:
>
> - Jika $a + b = 3$, maka didapatkan $a = \frac{11 \pm \sqrt{31}}{10}$.
> - Jika $a + b = \frac{3}{2}$, maka didapatkan $a = \frac{13 \pm \sqrt{79}}{20}$.
> - Jika $a + b = \frac{1}{2}$, maka didapatkan $a = \frac{1 \pm \sqrt{79}}{20}$.
> - Jika $a + b = 1$, maka didapatkan $a = \frac{5 \pm \sqrt{15}}{10}$.

14. Diberikan titik A, B, C, D, E terletak pada lingkaran seperti gambar dibawah ini sehingga panjang $AB = BC = CD$ dan E titik tengah busur AD. Jika BE memotong AD di titik F dan AD diameter lingkaran, maka besar $\angle AFE$ adalah . . . .



A. 95° B. 80° C. 105° D. 120°

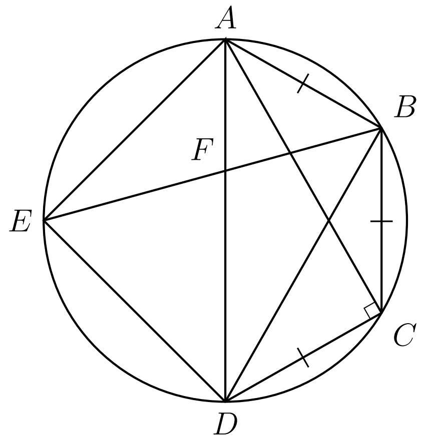
Solusi. Perhatikan gambar berikut. Misalkan besar $\angle CAD = \alpha$. Karena AD diameter lingkaran, maka besar $\angle AED = \angle ACD = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$.

Perhatikan bahwa $ABCD$ merupakan segiempat talibusur. Akibatnya,

$$\angle CBD = \angle CAD = \alpha$$

Karena panjang $CB = CD$, maka besar $\angle CDB = \angle CBD = \alpha$. Perhatikan bahwa $\triangle CBD$ dan $\triangle BAC$ kongruen. Akibatnya, besar $\angle BCA = \angle CBD = \alpha$. Karena panjang $BC = BA$, maka besar $\angle CAB = \angle ACB = \alpha$. Kita peroleh bahwa

$$\angle DAB = \angle DAC + \angle CAB = \alpha + \alpha = 2\alpha$$



Perhatikan juga bahwa $\angle BDA = \angle BCA = \alpha$. Perhatikan $\triangle ACD$. Maka

$$\begin{aligned} \angle DAC + \angle ACD + \angle CDA &= 180^\circ \\ \alpha + 90^\circ + 2\alpha &= 180^\circ \\ 3\alpha &= 90^\circ \\ \alpha &= 30^\circ \end{aligned}$$

Karena E titik tengah busur AD, maka panjang $AE = ED$ sehingga $\angle EAD = \angle EDA = 45^\circ$. Perhatikan bahwa $ABDE$ segiempat talibusur yang berakibat

$$\angle BEA = \angle BDA = \alpha = 30^\circ$$

Perhatikan $\triangle AFE$, maka

$$\begin{aligned} \angle AFE + \angle FAE + \angle FEA &= 180^\circ \\ \angle AFE + 45^\circ + 30^\circ &= 180^\circ \\ \angle AFE + 75^\circ &= 180^\circ \\ \angle AFE &= 105^\circ \end{aligned}$$

Jadi, besar $\angle AFE = \boxed{105^\circ}$.

> **Komentar.** Sebanyak 56.25% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini tergolong **mudah-sedang**. Penyelesaian dari soal ini memanfaatkan sifat dari segiempat talibusur, hubungan sudut pusat-sudut keliling, dan kekongruenan dari dua segitiga.

15. Banyak bilangan real x yang memenuhi persamaan

$$\left(x^2 - 6x + 9\right)^{x^2-1} = 1$$

adalah . . . .

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Solusi.

a) Jika $x^2 - 6x + 9 = 1$, maka $x^2 - 6x + 8 = 0$ yang ekuivalen dengan $(x-2)(x-4) = 0$ sehingga $x = 2$ dan $x = 4$. Mudah saja dicek, memenuhi persamaan.
b) Jika $x^2 - 6x + 9 = -1$, maka $x^2 - 6x + 10 = 0$. Diskriminan dari $x^2 - 6x + 10$ adalah

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(10) = 36 - 40 = -4 < 0$$

yang berarti $x^2 - 6x + 10$ tidak memiliki akar real.
c) Jika $x^2 - 1 = 0$, maka $x = \pm 1$. Cek kembali ke persamaan, memenuhi.

Maka semua bilangan real x yang memenuhi adalah $x = -1, 1, 2, 4$ yang berarti ada $\boxed{4}$.

> **Komentar.** Sebanyak 31.25% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang-sulit**. Kemungkinan solusi dari $a^x = 1$ adalah $(a, x) = (1, x)$, $\left(-1, \frac{p}{q}\right)$ dengan p genap, dan $(a, 0)$. Anda dapat mengecek kembali ke persamaan soal untuk memastikan nilai yang diminta memenuhi..

16. Banyak pasangan bilangan prima (p, q) dimana $p > q$ yang memenuhi

$$(q+1) + (q+2) + \cdots + p = 2020$$

adalah . . . .

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Solusi. Perhatikan bahwa deret tersebut merupakan deret aritmetika dengan beda $b = 1$ dan suku awal $q + 1$. Banyak sukunya yaitu $p - (q + 1) + 1 = p - q - 1 + 1 = p - q$. Maka

$$\begin{aligned} 2020 &= \frac{p-q}{2}(q+1+p) \\ 4040 &= (p-q)(p+q+1) \end{aligned}$$

Andaikan $q = 2$. Maka p merupakan bilangan ganjil. Akibatnya, $p - q = p - 2$ merupakan bilangan ganjil dan $p + q + 1 = p + 3$ merupakan bilangan genap. Perhatikan bahwa $4040 = 2^3 \cdot 5 \cdot 101$. Maka kemungkinan nilai $p - 2$ adalah 5 atau 101.

a) Jika $p - 2 = 5$ yang berarti $p = 7$, maka $p + q + 1 = p + 3 = 10$ yang berarti tidak mungkin memenuhi.

b) Jika $p - 2 = 101$ yang berarti $p = 103$, maka $p + q + 1 = p + 3 = 106$ yang berarti tidak mungkin memenuhi.

Andaikan $p > q > 2$. Maka p dan q keduanya merupakan bilangan ganjil. Akibatnya, $p - q$ merupakan bilangan genap dan $p + q + 1$ merupakan bilangan ganjil. Demikian kemungkinan nilai $p + q + 1$ adalah 5 atau 101.

a) Jika $p + q + 1 = 5$, maka $p + q = 4$ yang tidak mungkin ada bilangan prima p, q yang memenuhi.

b) Jika $p + q + 1 = 101$, maka $p + q = 100$. Kemungkinannya adalah

$$(p, q) = (97, 3), (89, 11), (83, 17), (73, 23), (71, 29), (59, 41), (53, 47)$$

Karena $p + q + 1 = 101$, maka

$$p - q = \frac{4040}{p+q+1} = \frac{4040}{101} = 40$$

Dari semua pasangan diatas, tidak terdapat pasangan (p, q) sehingga $p - q = 40$. Demikian tidak ada bilangan prima p, q yang memenuhi.

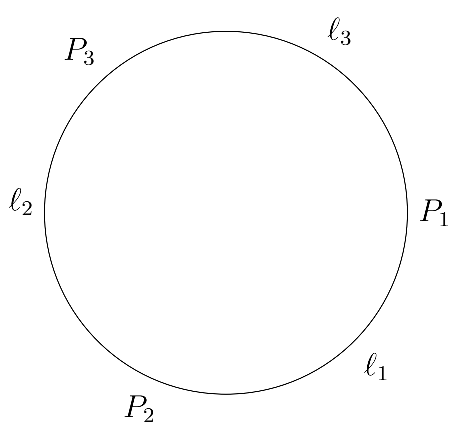
Jadi, banyak pasangan bilangan prima (p, q) yang memenuhi adalah $\boxed{0}$.

> **Komentar.** Sebanyak 45.31% berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang**. Anda dapat membagi kasus berdasarkan paritas (ganjil atau genap) nilai dari q. Hal ini dapat mengurangi pembagian kasus yang memenuhi $4040 = (p - q)(p + q + 1)$.

17. Sebanyak 8 kursi identik yang mengelilingi sebuah meja bundar. Sebanyak 4 laki-laki dan 3 perempuan akan duduk di kursi tersebut. Banyak cara mereka duduk sehingga tidak ada dua perempuan yang duduk bersebelahan adalah . . . .

A. 2160 B. 720 C. 1440 D. 4320

Solusi. Kita tempat terlebih dahulu 3 perempuan. Misalkan perempuan tersebut sebagai P_1, P_2, dan P_3. Banyak cara menyusun susunan perempuan ini ada $(3 - 1)! = 2! = 2$. Misalkan ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 berturut-turut menyatakan banyak kursi diantara P_1 dengan P_2, P_2 dengan P_3, dan P_3 dengan P_1. Karena perempuan tidak boleh duduk bersebelahan, maka haruslah $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \geq 1$ dan $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 = 5$.



Banyak pasangan (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) adalah $C^{5-1}_{3-1} = C^4_2 = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$. Sedangkan, banyak permutasi untuk tempat duduk laki-laki adalah $P^5_4 = \dfrac{5!}{1!} = 120$. Demikian total cara mereka duduk adalah

$$2 \cdot 6 \cdot 120 = \boxed{1440}$$

> **Komentar.** Sebanyak 20.31% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini tergolong **sulit**. Kata kunci penyelesaian dari soal ini adalah permutasi siklis dan penggunaan *Star and Bar Theorem*.

18. Diberikan p dan q bilangan prima sehingga akar-akar dari $x^2 - px + q = 0$ merupakan bilangan bulat. Misalkan x_1 dan x_2 merupakan akar-akar dari $x^2 - px + q = 0$. Nilai dari $x_1^2 + x_2^2 + p^2 + q^2$ adalah . . . .

    A. 15 B. 18 C. 34 D. 25

    Solusi. Menurut Vieta, maka
    $$x_1x_2 = \frac{c}{a} = \frac{q}{1} = q$$
    Karena x_1 dan x_2 merupakan bilangan bulat, maka salah satu dari x_1 atau x_2 bernilai ± 1.

    a) Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $x_1 = 1$ dan $x_2 = q$. Menurut Vietta, maka
    $$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-p)}{1} = p \iff 1 + q = p$$
    yang berarti $p - q = 1$. Bilangan prima (p, q) yang memenuhi adalah $(p, q) = (3, 2)$. Demikian
    $$0 = x^2 - px + q = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$
    yang berarti $x = 1$ atau $x = 2$. Demikian $x_1 = 1$ dan $x_2 = 2$. Sehingga
    $$x_1^2 + x_2^2 + p^2 + q^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2 = 1 + 4 + 9 + 4 = 18$$

    b) Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $x_1 = -1$ dan $x_2 = -q$. Menurut Vietta, maka
    $$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-(-p)}{1} = p \iff -1 - q = p$$
    yang jelas tidak mungkin karena $p > 0$ sedangkan $-1 - q < 0$.

    Jadi, nilai dari $x_1^2 + x_2^2 + p^2 + q^2 = \boxed{18}$.

    > **Komentar.** Sebanyak 59.37% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini tergolong **mudah-sedang**. Ide penyelesaian dari soal ini dengan memanfaatkan Teorema Vieta yang memberikan $x_1x_2 = q$. Hal ini akan lebih mudah karena q bilangan prima dan x_1, x_2 bilangan bulat.

19. Suatu pasangan bilangan asli (a, b) disebut *puyuh* jika terdapat bilangan prima p yang memenuhi
    $$ab - p = b(b - 1)$$
    Banyak pasangan bilangan asli (a, b) yang puyuh dengan $p < 100$ adalah . . . .

    A. 25 B. 31 C. 42 D. 50

    Solusi. Perhatikan bahwa
    $$p = ab - b(b - 1) = b(a - b + 1)$$

    a) Andaikan $b > a - b + 1$ yang berarti $2b > a + 1$. Maka $b = p$ dan $a - b + 1 = 1$ yang menyimpulkan $a = b$. Jelas bahwa $2a = 2b > a + 1 \iff 2a > a + 1$. Maka $a = b = p$. Ada sebanyak 25 bilangan prima p yang kurang dari 100. Demikian ada 25 pasangan (a, b) yang puyuh.

    b) Andaikan $b < a - b + 1$ yang berarti $2b < a + 1$. Maka $b = 1$ dan $a - b + 1 = p$ yang menyimpulkan $a = p$. Jelas bahwa $2b < a + 1 \iff 1 < a$. Ada 25 bilangan prima p yang kurang dari 100. Demikian ada 25 pasangan (a, b) yang puyuh.

    Jadi, banyak pasangan bilangan asli (a, b) yang puyuh dengan $p < 100$ adalah $25 + 25 = \boxed{50}$.

    > **Komentar.** Sebanyak 15.62% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Soal ini merupakan soal **tersulit** dari PMC IV. Kesalahan umum yang dilakukan adalah salah satu kasus tidak terhitung sehingga cukup menjawab sebanyak 25 pasangan (pada pilihan A) dan tidak teliti dalam menghitung banyak bilangan prima yang kurang dari 100.

20. Suatu fungsi f memenuhi properti berikut.

    (a). Memiliki domain semua bilangan real,

    (b). Berlaku $f(-x) = -f(x)$,

    (c). Memenuhi
    $$f(2x - 3) + f(x - 3) - 2f(3x - 10) = 28 - 6x$$

    Nilai dari $f(4)$ adalah . . . .

A. -2 B. 4 C. 8 D. 11

Solusi. Subtitusi $x = 2$, maka

$$\begin{aligned} f(4-3) + f(2-3) - 2f(6-10) &= 28 - 12 \\ f(1) + f(-1) - 2f(-4) &= 16 \\ f(1) - f(1) + 2f(4) &= 16 \\ f(4) &= 8 \end{aligned}$$

Jadi, nilai dari $f(4) = \boxed{8}$.

> **Komentar.** Sebanyak 31.25% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini tergolong **sedang-sulit**. Anda diharapkan kreatif dalam menemukan $f(4)$ dan memanfaatkan properti fungsi f yang diketahui.

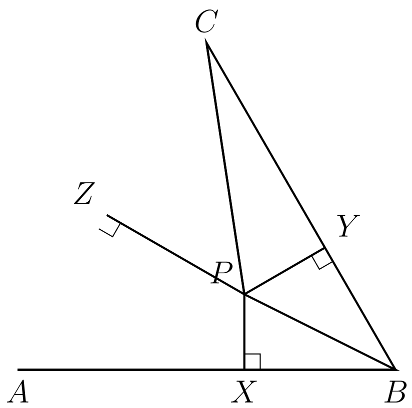
21. Diberikan $\triangle ABC$ dengan panjang sisi $AB = BC = AC = 6$ satuan. Titik P terletak di dalam $\triangle ABC$. Misalkan titik X, Y, Z berturut-turut pada sisi AB, BC, dan AC sehingga besar $\angle AXP = \angle BYP = \angle CZP = 90°$. Nilai dari

$$\sqrt{AZ^2 + PZ^2 - AX^2} + \sqrt{PX^2 + BX^2 - BY^2} + \sqrt{PY^2 + CY^2 - CZ^2}$$

adalah . . . .

A. $6\sqrt{3}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solusi. Perhatikan gambar berikut.



Perhatikan $\triangle APX$, menurut phytagoras maka

$$AP^2 = AX^2 + PX^2$$

Perhatikan $\triangle APZ$, menurut phytagoras maka

$$AP^2 = AZ^2 + PZ^2$$

yang menyimpulkan $AP^2 = AX^2 + PX^2 = AZ^2 + PZ^2$. Demikian

$$AX^2 + PX^2 = AZ^2 + PZ^2 \iff PX = \sqrt{AZ^2 + PZ^2 - AX^2}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh

$$PY = \sqrt{PX^2 + BX^2 - BY^2} \quad \text{dan} \quad PZ = \sqrt{PY^2 + CY^2 - CZ^2}$$

Demikian

$$\sqrt{AZ^2 + PZ^2 - AX^2} + \sqrt{PX^2 + BX^2 - BY^2} + \sqrt{PY^2 + CY^2 - CZ^2} = PX + PY + PZ$$

Perhatikan bahwa luas $\triangle ABC$ adalah $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9\sqrt{3}$ satuan luas. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} L_{\triangle ABC} &= L_{\triangle ABP} + L_{\triangle BCP} + L_{\triangle CAP} \\ 9\sqrt{3} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot PX + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot PY + \frac{1}{2} \cdot CA \cdot PZ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6PX + \frac{1}{2} \cdot 6PY + \frac{1}{2} \cdot 6PZ \\ 9\sqrt{3} &= 3(PX + PY + PZ) \\ 3\sqrt{3} &= PX + PY + PZ \end{aligned}$$

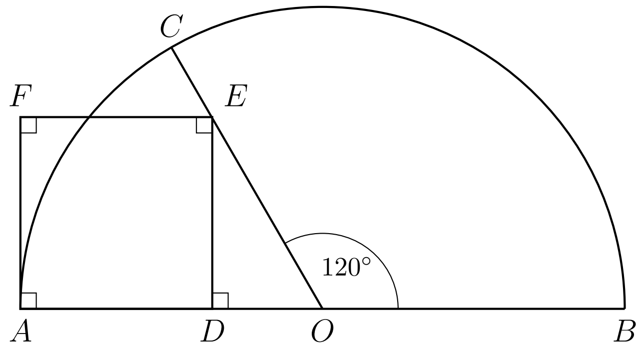
Demikian
$$\sqrt{AZ^2 + PZ^2 - AX^2} + \sqrt{PX^2 + BX^2 - BY^2} + \sqrt{PY^2 + CY^2 - CZ^2} = \boxed{3\sqrt{3}}$$

> **Komentar.** Sebanyak 35.93% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sedang**. Kata kunci penyelesaian dari soal ini dengan memanfaatkan luas segitiga dan phytagoras.

22. Sebuah setengah lingkaran berpusat di titik O dan AB sebagai diameternya. Titik C terletak pada busur AB sehingga besar $\angle BOC = 120°$. Titik D terletak pada AO dan titik E terletak pada OC sehingga $ADEF$ merupakan persegi. Jika panjang jari-jari setengah lingkaran adalah 6 cm, maka panjang CE adalah . . . . cm.

A. $6 + 6\sqrt{3}$ B. $6\sqrt{3} - 6$ C. $9 - 3\sqrt{3}$ D. $12 - 6\sqrt{3}$

Solusi. Perhatikan gambar berikut. Karena $\angle BOC = 120°$, maka $\angle DOE = 60°$ dan $\angle OED = 30°$.



Karena $\triangle DOE$ memiliki sudut $30°, 60°, 90°$, maka $DO : DE : OE = 1 : \sqrt{3} : 2$. Misalkan panjang sisi persegi adalah s. Maka panjang $AD = s$ dan $DE = s$. Sehingga panjang DO adalah
$$DO = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot DE = \frac{s}{\sqrt{3}} = \frac{s}{3}\sqrt{3}$$

Sehingga
$$AO = AD + DO = s + \frac{s}{3}\sqrt{3} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}s$$

Perhatikan bahwa AO merupakan jari-jari setengah lingkaran, maka panjang $AO = 6$ cm. Demikian
$$\begin{aligned}
\frac{3+\sqrt{3}}{3}s &= 6 \\
s &= 6 \cdot \frac{3}{3+\sqrt{3}} \\
&= \frac{18}{3+\sqrt{3}} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \\
&= \frac{18\left(3-\sqrt{3}\right)}{9-3} \\
&= \frac{18\left(3-\sqrt{3}\right)}{6} \\
s &= 3\left(3-\sqrt{3}\right) \\
s &= 9 - 3\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa
$$OE = 2DO = 2 \cdot \frac{s}{3}\sqrt{3} = 2 \cdot \frac{9-3\sqrt{3}}{3}\sqrt{3} = 2\left(3\sqrt{3} - 3\right) = 6\sqrt{3} - 6$$

Maka
$$CE = OC - OE = 6 - \left(6\sqrt{3} - 6\right) = 6 - 6\sqrt{3} + 6 = 12 - 6\sqrt{3}$$

Jadi, panjang CE adalah $\boxed{12 - 6\sqrt{3}}$.

> **Komentar.** Sebanyak 18.75% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sulit**. Kesalahan umum yang dilakukan peserta adalah dengan menjawab panjang dari OE atau sisi persegi, sedangkan yang ditanyakan adalah panjang CE.

23. Diberikan bilangan a, b, c tak nol sehingga
$$\frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b}$$
Nilai dari
$$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$$
yang mungkin adalah . . . .

A. 15 B. -4 C. 8 D. 2

Solusi. Perhatikan bahwa
$$\begin{aligned} \frac{a+b}{c} &= \frac{b+c}{a} & \text{(Kalikan silang)} \\ a^2+ab &= bc+c^2 \\ a^2-c^2+ab-bc &= 0 \\ (a+c)(a-c)+b(a-c) &= 0 \\ (a+b+c)(a-c) &= 0 \end{aligned}$$
sehingga $a+b+c=0$ atau $a=c$.

Kasus 1 : $a+b+c=0$

Maka
$$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right) = \frac{a+b}{a}\cdot\frac{b+c}{b}\cdot\frac{c+a}{c} = \frac{-c}{a}\cdot\frac{-a}{b}\cdot\frac{-b}{c} = -1$$

Kasus 2: $a=c$

Perhatikan bahwa
$$\begin{aligned} \frac{b+c}{a} &= \frac{c+a}{b} & \text{(Kalikan silang)} \\ b^2+bc &= ac+a^2 \\ b^2-a^2+bc-ac &= 0 \\ (b+a)(b-a)+c(b-a) &= 0 \\ (b+a+c)(b-a) &= 0 \end{aligned}$$
sehingga $a+b+c=0$ atau $b=a$. Kasus $a+b+c=0$ telah dihitung. Kita ambil kasus $b=a$. Dapat disimpulkan $a=b=c=$. Maka
$$\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right) = (1+1)(1+1)(1+1) = 2\cdot2\cdot2 = 8$$
Jadi, nilai yang mungkin dari $\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\left(1+\frac{a}{c}\right)$ adalah $\boxed{8}$.

> **Komentar.** Sebanyak 73.43% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **sangat mudah**. Kesalahan umum yang dilakukan peserta yaitu menganggap $(a+c)(a-c) = -b(a-c)$ dengan $a+c=-b$ yang menyimpulkan $a+b+c=0$. Sehingga kasus untuk $a=b=c$ tidak terhitung.

24. Untuk setiap bilangan asli n, didefinisikan
$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\times 1$$
Sebagai contoh, $1! = 1$ dan $5! = 120$. Banyak bilangan kuadrat sempurna dari barisan bilangan-bilangan
$$1!;\quad 1!+2!;\quad 1!+2!+3!;\quad 1!+2!+3!+4!;\quad \cdots;\quad 1!+2!+3!+4!+\cdots+2020!$$
adalah . . . .

Catatan : Bilangan asli m disebut *kuadrat sempurna* jika $\sqrt{m}$ bilangan bulat.

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Solusi. Pandang barisan tersebut adalah

$$u_n = 1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + n!$$

dimana $n \leq 2020$. Untuk $n \leq 4$, diperoleh u_1 dan u_3 merupakan kuadrat sempurna. Perhatikan bahwa untuk $n \geq 5$ berakibat angka satuan $n!$ adalah 0. Maka angka satuan dari

$$1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + n!$$

sama dengan $1! + 2! + 3! + 4!$ untuk $n \geq 5$, yaitu angka satuannya 3. Padahal, angka satuan dari kuadrat sempurna adalah $0, 1, 4, 5, 6$, atau 9. Demikian u_n tidak mungkin kuadrat sempurna untuk $n \geq 5$. Demikian hanya $u_1 = 1! = 1$ dan $u_3 = 1! + 2! + 3! = 9$ yang merupakan kuadrat sempurna, yang berarti ada $\boxed{2}$.

> **Komentar.** Sebanyak 51.56% peserta berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan soal ini adalah **mudah-sedang**. Ide penyelesaian dari soal ini adalah meninjau angka satuan dari bilangan kuadrat sempurna dan bentuk $1! + 2! + 3! + 4! + \cdots + n!$, sehingga diperoleh batasan nilai dari n.

25. Untuk setiap bilangan real x, didefinisikan:
    - $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lfloor 5 \rfloor = 5$; $\lfloor 10,4 \rfloor = 10$; dan $\lfloor -6,5 \rfloor = -7$.
    - $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari atau sama dengan x. Sebagai contoh, $\lceil 5 \rceil = 5$; $\lceil 10,4 \rceil = 11$; dan $\lceil -6,5 \rceil = -6$.

    Misalkan semua bilangan real x yang memenuhi persamaan

    $$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{x+1}{2} \right\rceil = 2020$$

    dapat dinyatakan dengan $a < x < b$. Jika nilai maksimum a adalah M_a dan nilai minimum b adalah m_b, nilai dari $M_a + m_b$ adalah . . . .

    A. 2020 B. 4039 C. 3055 D. 4046

Solusi. Kita bagi menjadi dua kasus.

Kasus 1 : x bilangan bulat

Misalkan x bilangan ganjil, tuliskan $x = 2k - 1$ dengan k bilangan bulat. Maka

$$\begin{aligned} 2020 &= \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{x+1}{2} \right\rceil \\ &= \left\lfloor \frac{2k-1}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{2k-1+1}{2} \right\rceil \\ &= k - 1 + k \\ 2021 &= 2k \\ 1010\frac{1}{2} &= k \end{aligned}$$

yang berarti kontradiksi. Andaikan x bilangan genap, tuliskan $x = 2k$ dengan k bilangan bulat. Maka

$$\begin{aligned} 2020 &= \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{x+1}{2} \right\rceil \\ &= \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil \\ &= k + k + 1 \\ 2019 &= 2k \\ 1009\frac{1}{2} &= k \end{aligned}$$

yang berarti kontradiksi.

Kasus 2 : x bukan bilangan bulat

Lemma

Untuk setiap bilangan real, berlaku $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Bukti. Kita definisikan $\lfloor k \rfloor = k - \{k\}$ dengan $0 \le k < 1$ untuk setiap bilangan real k. Maka

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \frac{x}{2} - \left\{ \frac{x}{2} \right\} + \frac{x+1}{2} - \left\{ \frac{x+1}{2} \right\} = x + \frac{1}{2} - \left\{ \frac{x}{2} \right\} - \left\{ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right\}$$

Jika $\left\{ \frac{x}{2} \right\} < \frac{1}{2}$, maka berakibat

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = x + \frac{1}{2} - \left\{ \frac{x}{2} \right\} - \left\{ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right\} = x + \frac{1}{2} - \left\{ x + \frac{1}{2} \right\} = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Jika $\left\{ \frac{x}{2} \right\} \ge \frac{1}{2}$, maka berakibat

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = x + \frac{1}{2} - \left\{ \frac{x}{2} \right\} - \left\{ \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right\} = x + \frac{1}{2} - \left\{ x - \frac{1}{2} \right\} - 1 = x - \frac{1}{2} - \left\{ x - \frac{1}{2} \right\} = \left\lfloor x - \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Jadi, terbukti bahwa $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. □

Karena x bukan bilangan ganjil, maka $\left\lceil \frac{x+1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + 1$. Kita dapatkan

$$2020 = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{x+1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + 1 = \lfloor x \rfloor + 1$$

yang menyimpulkan $\lfloor x \rfloor = 2019$. Sehingga $2019 \le x < 2020$. Karena x bukan bilangan bulat, maka $2019 < x < 2020$. Berarti $M_a = 2019$ dan $m_b = 2020$ sehingga $M_a + m_b = \boxed{4039}$.

Komentar. Sebanyak 45.31% berhasil menjawab soal ini dengan benar. Demikian tingkat kesulitan dari soal ini adalah **sedang**. Ide penyelesaian dari soal ini dapat dengan membagi kasus dan memanfaatkan $\lfloor x \rfloor + 1 = \lceil x \rceil$ dengan x bukan bilangan bulat. Sepertinya, sudah cukup familiar bahwa $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.